1 Sformułowanie problemu

Pewne przedsiębiorstwo wytwarzające wyroby czekoladowe, postanowiło uruchomić jednodniową produkcję próbną dwóch nowych batonów, DANEK i JANEK. Przedsiębiorstwo chce tak ustalić produkcję batonów, aby z ich sprzedaży osiągnąć jak największy zysk. Na uruchomienie produkcji próbnej można przeznaczyć 6 godzin pracy urządzenia formującego batony oraz 240 kg masy bakaliowej, będącej jednym z podstawowych składników tych batonów. Postanowiono, że pracownicy oddelegowani do tej produkcji powinni zarobić co najmniej 400 zł. W przedsiębiorstwie tym wielkość produkcji mierzy się nie w sztukach, lecz masą produkcji, przyjmując 100 kg jako podstawową jednostkę pomiaru tej wielkości.

BATONY	NAKŁADY JEDNOSTKOWE			Zysk (zł/j.pr.)
	pracy urządzeń (h/j.pr.)	masy bakaliowej (kg/j.pr.)	robocizny (zł/j.pr.)	
DANEK (W_1)	2.0	40	100	480
JANEK (W_2)	1.2	60	200	210
ZASOBY	6 (h)	240 (kg)	400 (zł)	-

Tabela 1: Parametry problemu

W tablicy 1 zostały podane jednostkowe nakłady czasu pracy urządzenia formującego batony, masy bakaliowej oraz robocizny, dotyczące produkcji obu rodzajów batonów. W ostatniej kolumnie tablicy 1 podano także wartość zysku, jaki można osiągnąć ze sprzedaży 100 kg każdego rodzaju batonów przy aktualnych kosztach produkcji i zaplanowanych cenach zbytu.

2 Analiza problemu

W celu rozwiązania przedstawionego wyżej problemu należy podjąć decyzję jaką ilość poszczególnych batonów należy wyprodukować (przy zadanych ograniczeniach), aby zysk był jak największy. Decyzja wyrażona jest przez wartości dwóch zmiennych: x_1 - planowana wielkość produkcji batonów DANEK (jednostka produktu = 100 kg), x_2 - planowana wielkość produkcji batonów JANEK (jednostka produktu = 100 kg).

W rozpatrywanym problemie podane są trzy warunki, które musi spełnić produkcja próbna. Ich zapis formalny jest następujący:

- ograniczenie czasu pracy urządzenia

$$2 \cdot x_1 + 1.2 \cdot x_2 \leqslant 6 \tag{1}$$

- ograniczenie surowcowe

$$40 \cdot x_1 + 60 \cdot x_2 \leqslant 240 \tag{2}$$

- ograniczenie płacowe

$$100 \cdot x_1 + 200 \cdot x_2 \geqslant 400 \tag{3}$$

Z uwagi na interpretację zmiennych decyzyjnych x_1, x_2 ich wartości muszą być liczbami nieujemnymi (x_j, $j = 1, 2$), gdyż $x_j = 0$ oznacza brak produkcji wyrobu W_j, natomiast $x_j > 0$ określa wielkość uruchomionej produkcji wyrobu W_j.

Sposób oceny decyzji i kryterium optymalizacji można określić następująco: należy uzyskać jak największy zysk ze sprzedaży wyrobów produkcji próbnej. Więc wartość funkcji celu ma wyrażać zysk związany z podjętą decyzją.

Przy decyzji $x = [x_1, x_2]$ zysk osiągnięty ze sprzedaży wyrobu W_1 w ilości x_1 jednostek wyniesie $480x_1$ zł, a ze sprzedaży x_2 jednostek wyrobu W_2 będzie równy $210x_2$ zł. Funkcja celu $f(x) = 480x_1 + 210x_2$ wyraża zysk osiągnięty z produkcji ustalonej decyzją x. Decyzją optymalną w rozpatrywanym problemie jest ta spośród decyzji dopuszczalnych, która maksymalizuje wartość zysku za zbiorze decyzji dopuszczalnych.

Wyznaczenie decyzji optymalnej dla przedstawionego problemu w ujęciu matematycznym sprowadza się do wyznaczenia wektora $x = [x_1, x_2]$, będącego rozwiązaniem zadania, w którym maksymalizacja funkcji celu f jest oznaczona $f(x) \to max$:

$$f(x) = 480x_1 + 210x_2 \to max$$

przy warunkach:

$$2x_1 + 1.2x_2 \leqslant 6,$$

$$40x_1 + 60x_2 \leqslant 240,$$

$$100x_1 + 200x_2 \geqslant 400,$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x2 \geqslant 0.$$